平面境界における波の反射・透過問題に対する包括的定式化

早田　和弥

平面境界における波の反射・透過問題に対する従来の定式化における問題点を指摘している．このような問題点は著者の知る限りこれまで見過ごされてきた．引き続き，これを回避することが可能な新たな定式化を示している．この再定式化にともない，波の形状・種類によらず当該波動現象(古典論と量子論を含む)を包括的に記述することが可能となっている．

1．まえがき

平面境界における波の反射と透過は，電磁気学をはじめ波動現象を対象とする物理学の分野において最も基本的な現象の一つである．古典波，量子波にかかわらず，関連する場の量の境界での連続性の要請がこの現象の原因となっている．例えば，マクスウェルの電磁気学（古典電磁気学）においては，媒質境界での電磁場E，Hの接線成分の連続性が要請される．電磁波の反射・透過係数は入射電磁波の入射角と各媒質の波動（特性）イミタンス（インピーダンス，アドミタンス）に依存し，それらの表現式は多くの電磁気学・波動論の教科書に記載されている（Harrington, 1961: Chap.2; Marcuse, 1974: Chap.1; 高橋, 1975: 第1章; Johnk, 1975: Chap.6; 中山, 1986: 第7章; Heavens & Ditchburn, 1991: Chap.8）．

媒質1から媒質2への垂直入射の場合，振幅反射係数ρ，振幅透過係数τはよく知られた次式で与えられる．

$$\rho=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2} \tag{1 a}$$

$$\tau=\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2} \tag{1 b}$$

ここにη_jは媒質 j の波動アドミタンスである．これらの式に基づいた理論予測と実験結果との一致は既に確認されており，この意味で式(1)そのものの妥当性については何ら疑う余地はないといえる．

本論文では，平面境界における波の反射・透過問題に対する従来の定式化にはそれが自己矛盾を導くという意味で原理的困難が内在していることを指摘している．このような問題点は著者の知る限りこれまで見過ごされてきた．引き続き，このような困難を回避することが可能な修正された定式化を示している．この再定式化にともない，波の形状・種類によらず自己矛盾は解消され，当該波動現象（古典論と量子論を含む）を包括的に記述することが可能となる．

2．従来法による定式化

2.1　一般論

平面境界（z＝0）をなして接する二つの半無限透明媒質を考える．ここに入射側（z＜0）を領域1，出射側（z＞0）を領域2とする．領域1から波が境界に向かって入射す

HAYAMA Kazuya　札幌学院大学社会情報学部

ると，その一部分は領域2へ透過し，残りは入射側（領域1）に反射波として戻される．簡単のため垂直入射を考えると，各領域において

$$\psi_j(z,\ t)=a_jf_j(t-z/v_j)+b_jg_j(t+z/v_j) \quad (2\,a)$$

$$\phi_j(z,\ t)=\eta_ja_jf_j(t-z/v_j)-\eta_jb_jg_j(t+z/v_j) \quad (2\,b)$$

ここに ψ ならびに ϕ は波動場の振幅，a (b) は前進(後進)波成分の寄与を表す定数，f (g) は前進（後進）波成分の波形を表す正則関数 (Morse & Feshbach, 1953: Chap.11)，v は波の速度，t は時間を表す．また $\eta_1\neq\eta_2$, $a_1\neq 0$ とする．古典波に対しては，ψ, ϕ は実数でなければならないので，a, b, f, g はいずれも実数でなければならない．これに対して量子波では，これらの量は一般に複素数となる（もちろん，いずれの場合でも η と v は正の実数でなければならない）．例えば，時間調和場のマクスウェル理論に対しては，$\xi\equiv t\pm z/v_j$ とおくと，ω を角周波数として

$$(\psi,\ \phi)\ \equiv\ (E_x,\ H_y)\ \text{or}\ (E_y,\ H_x) \quad (3\,a)$$

$$f\ (\xi)=g\ (\xi)=\cos\ (\omega\xi) \quad (3\,b)$$

と書ける．

理論展開の便宜上，一般性を失うことなく

$$\langle f_j{}^2\rangle=\ \langle g_k{}^2\rangle,\ \ \langle f_jg_k\rangle>0 \quad (4)$$

とおく．ここに j = 1，2 および k = 1，2 であり，ブラケット記号は時間軸上の平均操作を意味する．すなわち，一般の連続（非局在）波に対して

$$\langle F\rangle=\lim_{T\to\infty}\ T^{-1}\int_t^{t+T}F(z,t)\ dt \quad (5\,a)$$

一方，周期Tの連続波および持続時間Tの局在（パルス）波に対しては

$$\langle F\rangle=T^{-1}\int_t^{t+T}F(z,t)\,dt \quad (5\,b)$$

と定義される．

境界（z = 0）における ψ および ϕ の連続性を課すと，式(2)より次式を得る．

$$a_1f_1(t)+b_1g_1(t)=a_2f_2(t) \quad (6\,a)$$

$$\eta_1a_1f_1(t)-\eta_1b_1g_1(t)=\eta_2a_2f_2(t) \quad (6\,b)$$

ここに，z > 0 では境界がないことを考慮し，$g_2(t+z/v_2)\equiv 0$ とした．表記の簡単化のため，以下では $f_j(t)$ ならびに $g_1(t)$ をそれぞれ f_j, g_1 と略記することにする．式(6)を行列形式で書き直すと

$$\begin{pmatrix} g_1 & -f_2 \\ \eta_1g_1 & \eta_2f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ \tau \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_1 \\ \eta_1f_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ここに $\rho\equiv b_1/a_1$, $\tau\equiv a_2/a_1$ とおいた．式(7)左辺の係数行列の行列式 Δ は

$$\Delta=g_1f_2(\eta_1+\eta_2) \quad (8)$$

ゆえに，もし Δ = 0 でないならば，すなわち $g_1f_2\neq 0$ のとき，式(7)は解くことができて次式を得る．

$$\rho=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\ \frac{f_1}{g_1} \quad (9\,a)$$

$$\tau=\frac{2\,\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\ \frac{f_1}{f_2} \quad (9\,b)$$

これらより強度反射係数，強度透過係数はそれぞれ

$$R\equiv|\rho|^2,\ \ T\equiv(\eta_2/\eta_1)\,|\tau|^2 \quad (10)$$

により算出される．エネルギー保存則から次の関係式が課される．

$$R+T=1 \quad (11)$$

式(9), (10)を式(11)へ代入すると，若干の代数操作の後，次式を得る．

$$[(f_1/g_1)^2-1]\ \eta_1{}^2-2\ [(f_1/g_1)^2-2(f_1/f_2)^2+1]\ \eta_1\eta_2+\ [(f_1/g_1)^2-1]\ \eta_2{}^2=0 \quad (12)$$

上式は，$f_1{}^2=g_1{}^2=f_2{}^2$ のときのみ恒等的に成り立つ．このことと式(4)より，$f_1/g_1=f_1/f_2=1$ が導出される．結局，もし $g_1f_2=0$ でないならば，よく知られた式(1)が導出される．

ここで再度強調しておきたいことは，式(1)は $g_1(t)$ ならびに $f_2(t)$ いずれも非零のときのみ意味があるということである．量子平面波に対しては，$g_1(t)=f_2(t)=\exp(i\ \omega t)$ であるから，この条件は常に満足される．ここに角振動数 ω は E，h をそれぞれエネルギー，プ

ランク定数として，$\omega=2\pi E/h$ で与えられる．しかしながら古典波に対しては，この条件は一般に満足されない．例外として，例えば $g_1(t)=f_2(t)=\exp(-t^2/T_W^2)$ で与えられるガウシャンパルスをあげることができる（T_W はパルス半幅の目安を与えるパラメータ）．この場合，少なくとも有限の t に対しては常に $g_1f_2\neq0$ となる．これとは対照的に古典平面波に対しては，$g_1(t)=f_2(t)=\cos(\omega t)$ と書けるから，$t\equiv t_n=(2n+1)\pi/(2\omega)$（n は任意の整数，$\omega$ は古典論における角振動数）において $g_1f_2=0$ となってしまうことがわかる．換言すると，時刻 t_n では式(1)の妥当性が必ずしも保証されない．以下では $g_1f_2=0$ から導かれる可能な三通りの場合，すなわち $(g_1=0,\ f_2\neq0)$，$(g_1\neq0,\ f_2=0)$，$(g_1=f_2=0)$ の場合について別個に考察してみる．

ケース I $(g_1=0,\ f_2\neq0)$：まず式(6)より，$f_1=0$（$\because \eta_1\neq\eta_2$）ならびに $\tau=0$ が得られる．ゆえに，式(10)，(11)より $\rho=1$ となる．

ケース II $(g_1\neq0,\ f_2=0)$：式(6)より，$f_1=\rho=0$．このとき式(10)，(11)より，$T=1$ と $|\tau|=\eta_1/\eta_2$ を得る．因果律より $|\tau|<1$ が要請されるので，不等式 $\eta_1<\eta_2$ が成立しなければならない．

ケース III $(g_1=f_2=0)$：式(6)から $f_1=0$（$\because \eta_1\neq0$）が得られる．

2.2 古典平面波の場合

以上の議論から，結局，古典平面波に対しては式(1)は次のように変更されなければならない．

$t\neq t_n$ に対しては

$$\rho(t)=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2} \tag{13 a}$$

$$\tau(t)=\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2} \tag{13 b}$$

一方，$t=t_n$ に対しては，$\rho(t)$，$\tau(t)$ いずれも一意的に決定できない（不定）．

ここで注目しなければならないことは，古典平面波に対しては反射係数，透過係数はいずれも時間依存となるため，関係式 $b_1(t)=\rho(t)a_1$，$a_2(t)=\tau(t)a_1$ を通して反射振幅 b_1，透過振幅 a_2 もまた時間依存になると結論されることである．この結論は明らかに，「b_1，a_2 が定数（つまり時間無依存）である」という当初の仮定と矛盾する．それでは式(2)において仮にこれらの量が定数であるという要請を省いたとしたらどうなるであろうか？ 残念なことに以下に示す理由から，この場合にも上記の矛盾は依然として解消されないことがわかる．つまり，上述した $\rho(t)$ と $\tau(t)$ の不定性，すなわち反射振幅 $b_1(t)$ および透過振幅 $a_2(t)$ の不定性は，式(5)における積分計算を無意味なものとする．このことは時間平均量の理論的算出が原理的に不可能であることを示している．

3．従来の定式化の問題点

古典平面波に対する従来の定式化は以下の二つに大別される．

【1】いわゆる時間調和場の複素表示により，式(3 b)を次の表記で置き換える．

$$f(\xi)=g(\xi)=\exp(i\omega\xi) \tag{14}$$

著者の知る限り，現在まで出版されている電磁気学の教科書の大多数がこの表示を用いて当該問題（古典波の反射・透過問題）を論じている．この表記においては常に，$g_1f_2\neq0$ が満足され，前節で指摘した矛盾は一切生じない．このことは式(14)の形が量子平面波のそれと形式上まったく区別できないことからも明らかである．しかしながら，古典場に対するこのような複素表示はあくまでも便宜上のものであることを思い起こさなければならない（高橋，1980）．すなわち，式(14)には常にその自己随伴項，$\exp(-i\omega\xi)$，が付随しているということである．したがって，複素数表示の妥当性は，「本来の実数表示を用いたときと同一の結果が導かれる」という前提の下でのみ保証されるものであり，この条件が満足されない場合には本来の実数表示[いまの場合，

式(3 b)］を採用しなければならない．一般に非線形系の場合，この条件は満たされないことは周知の事実であるが，前節での議論から，線形系でもこの「複素数表示と実数表示の等価性」が自明でない場合が存在することが証明された．

以上の考察から，古典平面波に対して式(14)を採用した従来の定式化において上述の自己矛盾が看過されてきた本質的要因はとりもなおさず，「古典波と量子波の混同」にあるということができる．

【2】式(3 b)のような実数表示を採用あるいは暗示しているが，任意の t に対して，$g_1f_2 \neq 0$ なる条件を先験的に仮定し，式(1)を導いている．これは例えば文献（高橋，1975：第1章），（中山，1986；第7章）などに見られる．

4．包括的定式化の試み

従来の定式化に潜在していたこのような原理的困難を回避するための方策として，次の二つが考えられる（説明の便宜上，古典平面波の場合を例にとる）．

【1】$t=t_n$ における反射振幅 $b_1(t)$，透過振幅 $a_2(t)$ の不定性をそのまま認め，式（5 b）で定義される時間平均量の定義にアドホックな変更を加える．例えば，式(5)中の積分をコーシーの主値積分に置き換える．

【2】$t=t_n$ における b_1，a_2 の不定性を回避できる包括的定式化を探索する．

著者は，上記【1】はあくまでも対症療法に過ぎず，【2】の方法論が電磁気学に代表される精密科学の正攻法であると信じる．そこでいま，式(6)に代わって次のような弱形式の境界条件を考えてみる．

$$\langle(a_1f_1+b_1g_1)^2\rangle^{1/2}=\langle(a_2f_2)^2\rangle^{1/2} \qquad (15\,a)$$

$$\langle(\eta_1a_1f_1-\eta_1b_1g_1)^2\rangle^{1/2}=\langle(\eta_2a_2f_2)^2\rangle^{1/2} \qquad (15\,b)$$

ここで拘束条件を弱形式としたことによる情報喪失が懸念されるが，以下の理論展開からこれが杞憂であることが判明する．

a_1，b_1，a_2 が定数（時間無依存）であるという仮定の下では，式(15)は次の形に変形される．

$$1+2\rho\langle\!\langle f_1g_1\rangle\!\rangle+\rho^2=\tau^2 \qquad (16\,a)$$

$$\eta_1{}^2-2\eta_1{}^2\rho\langle\!\langle f_1g_1\rangle\!\rangle+\eta_1{}^2\rho^2=\eta_2{}^2\tau^2 \qquad (16\,b)$$

ここに $\langle\!\langle f_1g_1\rangle\!\rangle\equiv\langle f_1g_1\rangle/\langle f_1{}^2\rangle$ であり，式(4)を考慮した．式(11)，(16)より未知数 ρ，τ，$\langle\!\langle f_1g_1\rangle\!\rangle$ は一意に決定される．簡単な代数計算の後，次の結果が得られる．

$$\rho=\sigma_r\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2} \qquad (17\,a)$$

$$\tau=\sigma_t\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2} \qquad (17\,b)$$

$$\langle\!\langle f_1g_1\rangle\!\rangle=1/\sigma_r \qquad (17\,c)$$

ここに $\sigma_r=\pm1$，$\sigma_t=\pm1$（複号任意）である．式(4)，（17 c）より σ_r は正でなければならない．したがって，$\sigma_r=1$ が導出され，これよりただちに，$f_1=g_1$ が得られる．一方，τ の符号についてはこれを純粋に代数学的方法で決定することはできない．しかしながら，以下に示すように，物理的要請を通してこれを決定することが可能である．いま仮に $\sigma_t=-1$ とおいて，$\eta_2/\eta_1\to1$ の極限を考えてみることにする．このとき式（17 b）より，$\tau\to-1$，すなわち $a_2\to-a_1$ となる（$\because\tau=a_2/a_1$）．媒質境界消失の極限（$\eta_2/\eta_1\to1$）におけるこのような不連続的な位相反転（位相跳躍）は物理学的に無意味であり，我々の物理的直感とも相容れない．それゆえ，$\sigma_t=-1$ なる仮定は誤りであり，$\sigma_t=1$ でなければならないと結論される（背理法による）．結局，式(17)における4つの可能性のうち，$(\sigma_r,\ \sigma_t)=(1,1)$ の場合のみが理にかなっていることが論証された．このとき式（17 a），（17 b）の表現は式(1)の表現と完全に一致し，しかも従来の定式化において生起したような原理的困難は何ら生じない．

5．むすび

平面境界における波の反射・透過問題に対

する従来の定式化には問題点が内在していることを指摘した．引き続き，これを回避することが可能な修正された定式化を示した．この修正に伴い，波の形状・種類に拘らず，古典論ならびに量子論を含む当該波動現象を包括的に記述することが可能となった．

参考文献

Harrington, R. F. (1961) Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill

Heavens, O. S. and Ditchburn, R. W. (1991) Insight into Optics, Wiley

Johnk, C. T. A. (1975) Engineering Electromagnetic Fields and Waves, Wiley

Marcuse, D. (1974) Light Transmission Optics, Van Nostrand Reinhold

Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953) Methods of Theoretical Physics, Part II, McGraw-Hill

中山正敏（1986）『電磁気学』裳華房

高橋秀俊（1975）『線形分布定数系論』岩波書店

高橋秀俊（1980）「複素数と電気工学」『電気学会雑誌』Vol.100，No.4：265－268