正規分布の裾の確率評価と乱数生成

中村　永友[1]　　　　土屋　高宏[2]

要　旨

コンピュータ上で何らかの数値実験やシミュレーションを行う際に，正規乱数を使う場面が多くある．多くの場合，正規乱数を直接求めるのではなく，一様乱数から何らかの変換を通して得ている．本報告では，超大量の正規分布の裾の乱数，具体的には 5σ 以上，を得るための方法を提案する．目的の連続型確率分布の乱数は，離散型確率分布の近似を通して生成する．近似した確率分布であるオイラリアン分布の正規分布に対する裾の確率近似の良さを示し，同時に乱数生成アルゴリズムを提示する．

キーワード：正規乱数，一様乱数，オイラリアン分布

1　は じ め に

コンピュータ上のシミュレーション実験では，何らかの乱数を用いることが多い．そのために任意の確率分布にしたがう疑似乱数生成法が数多く提案されている．一方，大規模なシミュレーションを行う際には，超大量の乱数が必要である．確率分布にしたがう乱数を生成するには，質の良い一様乱数をいかに入手するかということが重要であった．現在は物理乱数を個人でも入手できる環境にある一方で，長周期の疑似一様乱数を用いることができ，メルセンヌ＝ツイスター法といった優れた方法が，数値計算が可能なソフトウェア環境で用いることができるようになった．

一様乱数から特定の確率分布にしたがう乱数を得るためには，性質の良い確率分布では逆関数法等が利用できる．そうでない場合には重点標本抽出法（Importance Sampling）や変換等の技法によって得ることができる．正規乱数を生成する方法は Box＝Muller 法が標準的であるが，中心極限定理に依拠する一様乱数の複数個の和からも生成できる（12個の場合は，それらの和から 6 を引くと $N(0,1)$ にしたがう; 清水 (1976)）．しかし，超大量の正規分布にしたがう乱数をより高速に得るために，正規分布を近似した離散型確率分布であるオイラリアン分布にしたがう乱数を通して，連続型の疑似乱数を生成する方法を我々は提案した（Nakamura, 2015; 中村・土屋, 2015, 2016）．この方法は少なくとも Box＝Muller 法よりも演算回数が少なく，同時に高速な方法である．

一方，極端な事象の確率的評価や経済・金融分野におけるテールリスクの評価では，確率分布の裾における良質な乱数が必要とされる．Eulerian 分布は二項分布と比べて正規分布近似が非常に良い精度で得られる優れた性質を持ち，同時に裾についても広範囲な近似ができる．この性質に基づいて分布の裾領域における乱数を生成するためのアルゴリズムを提案する．

以下，オイラリアン分布とその性質，確率分布の裾の乱数の生成方法，数値実験の結果を示す．

2　オイラリアン分布

データを並べ替えるアルゴリズムとして変形バケットソートがあり，そのバケツ数は漸化式として表すことが出来る．これはでたらめに並んだ n 個の連続した数字の並べ替えのアルゴリズムとして提案したものである（土屋・中村, 2009; Tsuchiya, 2015）．バケットソートは並べ替えるデータの取りうる値が k 通りのとき，あらかじめ k 個の入れ物を用意するか，動的に増やしながら各々の数字に対応した入れ物にデータを入れていくアルゴリズムである．あらかじめ用意する

[1] 札幌学院大学　経済学部；nagatomo@sgu.ac.jp.
[2] 城西大学　理学部；takahiro@math.josai.ac.jp.

表1：各ビンのオイラリアン数　$M_n(i)$ $(n=1, 2, ..., 12)$.

n \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	1	1										
3	1	4	1									
4	1	11	11	1								
5	1	26	66	26	1							
6	1	57	302	302	57	1						
7	1	120	1191	2416	1191	120	1					
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1				
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1			
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1		
11	1	2036	152637	2203488	9738114	15724248	9738114	2203488	152637	2036	1	
12	1	4083	478271	10187685	66318474	162512286	162512286	66318474	10187685	478271	4083	1

入れ物の数を決めず，最終的に必要な入れ物数がデータの初期状態に依存する変形バケットソートを考案し，その入れ物数を表す離散型確率分布（Eulerian 分布）と漸化式を導出した．その漸化式は次の通りである．

$$\begin{cases} P_n(1)=P_n(n)=\dfrac{1}{n!} & (n\geq 1), \\ P_n(i)=\dfrac{i}{n}P_{n-1}(i)+\dfrac{n-(i-1)}{n}P_{n-1}(i-1) & \\ & (n\geq 3,\ i=2, ..., n-1). \end{cases}$$

この離散型確率分布は正規分布に対して非常に良い近似を与えることが示されている（土屋・中村, 2009）．このことから，この確率分布は平均が $(n+1)/2$，分散が $(n+1)/12$ の正規分布に近似的にしたがうと考えて良い．

確率分布としてではなく，各ビンをデータの総数で割っていないものは，オイラリアン数となる．それは次の漸化式により表すことが出来る．

$$\begin{cases} M_n(1)=M_n(n)=1 & (n\geq 1), \\ M_n(i)=iM_{n-1}(i)+\{n-(i-1)\}M_{n-1}(i-1) & \\ & (n\geq 3,\ i=2, ..., n-1). \end{cases}$$

この漸化式によって，オーダーが12までのオイラリアン数は，表1として得られる．ここでオイラリアン数とは，組み合わせ数学において m 個の数字の並びにおいて隣り合う2つの数字が“＜”となる総数の数え上げの順列数である．

3　離散型確率分布を通した連続型確率分布にしたがう乱数生成

離散型確率分布を通した連続型確率分布にしたがう乱数生成法は，中村・土屋（2015, 2016）で提案されている．その概要は以下の通りである．

(1)　連続型確率分布 $f(x)$ を離散近似した確率関数 $p(x)$ を用意する．

(2)　一様乱数 u を生成する．

(3)　u を基にして $p(x)$ にしたがう乱数 q' を生成する．

(4)　$q=q'+u$ と変換する．

この手続きによって離散型確率分布のビンの幅が十分狭いとき，q は $f(x)$ からの乱数とみなすことができる．この方法の重要なポイントは2つある．まず，$u\in(0, 1]$ であり，q' は，例えば $1, 2, 3, ...$ のような整数の離散値をとり，(4)によって $q\in(q', q'+1]$ となること，そして，q を生成するときに一度使った u を再び使っている点である．ただし，u と q が独立であることが前提であり，さらに $p(x)$ は $f(x)$ の近似精度が十分よいという条件が必要である．

この手続きによって生成された大量の乱数 q は，全体として連続型確率分布 f にしたがい，局所的には(任意の区間では)一様分布となる．ここでは，話を簡単にするために離散値 q' は整数値とし，さらに区間 $(q', q'+1]$ と設定しているが，目的の確率分布 f にあわせて適宜変換すれば良い．

4　確率分布の裾の乱数の生成方法

オイラリアン分布が正規分布の良い近似であることを利用して，正規分布の裾の乱数を生成する方法を提案する．

オーダー n のオイラリアン数は，ビンの番号が $i=1, ..., n$ である．分布の右裾の乱数を得るために，$i>m$ $(m>(n+1)/2)$ となる m を指定する．m 以上の対応するビンのオイラリアン数 $M_n(i)$ $(i=m, m+1,$

表２：標準化したオイラリアン分布の裾の最大値

オーダー n	オイラリアン分布 最大値	確率	二項分布 最大値	確率
10	4.70	1.30^{-6}	3.16	7.83^{-4}
20	7.18	3.45^{-13}	4.47	3.87^{-6}
50	11.88	7.15^{-33}	7.07	7.69^{-13}
75	14.70	3.11^{-49}	8.66	2.35^{-18}
100	17.06	1.42^{-65}	10.00	7.62^{-24}
200	24.31	7.37^{-131}	14.14	1.04^{-45}
500	38.61	1.75^{-326}	22.36	4.75^{-111}
750	47.34	1.97^{-489}	27.39	2.01^{-165}
1000	54.69	2.36^{-652}	31.62	8.98^{-220}
2000	77.40	6.05^{-1304}	44.72	4.53^{-437}
5000	122.44	1.81^{-3258}	70.71	1.04^{-1088}
7500	149.97	3.68^{-4887}	86.60	1.15^{-1631}
10000	173.18	7.93^{-6516}	100.0	1.34^{-2174}

$a^b = a\times 10^b$．「最大値」は各分布の取り得る最大値で，「確率」はその値からの上側確率である．

表３：オイラリアン分布の99.9%をカバーする範囲

オーダー n	理論値による ビン数	割合	確率	ビン数による ビン数	確率
20	11	0.550	0.99997	9	0.99917
50	17	0.340	0.99996	15	0.99970
75	20	0.267	0.99993	18	0.99962
100	23	0.230	0.99992	21	0.99969
200	29	0.145	0.99959	29	0.99959
500	45	0.0900	0.99950	43	0.99911
750	55	0.0733	0.99949	53	0.99918
1000	63	0.0630	0.99943	61	0.99916
2000	87	0.0435	0.99924	87	0.99924
3000	107	0.0357	0.99928	105	0.99910
4000	123	0.0308	0.99924	121	0.99908
5000	137	0.0274	0.99921	135	0.99905

標準正規分布の平均を中心とする99.9%をカバーするビンの数とその全ビン数に対する割合，その確率を示す．「理論値による」とは，標準正規分布の上側%点からのもので，「ビン数による」とは，実際の分布から99.9%をカバーするビン数を求めた．

$\ldots, n)$ に対して通し番号をつけ，$1, 2, \ldots, \sum_{i=m}^{n} M_n(i)$ とする．その最終値を N とする．$r\in[1, N]$ なる整数値の一様乱数を生成し，対応するビン $b\in[m, n]$ を探す．$r'=r/N$ で実数化し，$t=b+r'$ と変換する．これによって正規分布にしたがう分布の裾の乱数が得られる．

5　裾の確率の評価

正規分布の裾の領域で乱数を生成する際に，その最大値が生成方法によって規定される．オイラリアン分布は非常に広い範囲の裾をカバーすることを以下で示す．またこれに関係する上側確率について言及する．

5.1　裾の最大値

まず，オイラリアン分布にしたがって正規乱数を生成したときに，理論的に取り得る最大値を検討する．正規分布の近似という意味で二項分布と比較し，その理論値を表２に示す．この表との比較として，Box=Muller 法における最大値は，32bit のコンピュータでは6.66，64bit では9.42である．これらと比較してもオイラリアン分布の裾のカバーする広さが一目瞭然で，オーダー（ビン数）を増やすほど，最大値がどんどん増加する．このことからも，乱数生成方法としては良い性質を持っていることがわかる．

5.2　正規分布とのずれ

表３に正規分布とのずれを端的に示す．標準正規分布の中心に確率99.9%をとり，上側%点を z とし，このときに，オイラリアン分布で $\pm z$ 以内の確率をカバーするビン数が，表の左側の「理論値による」内の「ビン数」である．右側は，実際のオイラリアン分布の中心から見て，99.9%をカバーするビン数を示す．裾の確率を正規分布と比較したときに，実際は正規分布より早く減衰していることがわかる．

5.3　裾の確率

次に，標準化したオイラリアン分布の裾の確率の評価を行う．オイラリアン分布は元々が離散型確率分布であるため，ある種の連続化をしてその近似精度を向上する方法を示す．

z を指定して，対応する p 値（上側確率）を求める．z を含むビンの番号を m，そのビンのオイラリアン数を $M_n(m)$ とすると，この数を以下で補正する．

$$M_n'(m)=M_n(m)\times\frac{(\phi(z)+\phi(b_2))(b_2-z)}{2\times(b_2-b_1)\phi(z)}$$

ここで，

d_1, d_2: 標準化したビンの境界値，
z: 指定された値，
$\phi(z)$: 値 z における標準正規分布の密度，
$M_n(m)$: m 番目のビンのオイラリアン数，

である．この補正によって，z より大きな値のオイラリアン数の総和は，

$$M_n'(m)+\sum_{i=m+1}^{n} M_n(i)$$

として求めて，$n!$ で割ることで，確率が求められる．

確率分布の裾の部分から乱数を得る一般的な方法

表 4 ：オーダー100のオイラリアン分布からのサンプリングの結果とオイラリアン数

ビン番号	度数	確率	累積確率	オイラリアン数	z 値	ビン番号	度数	確率	累積確率	オイラリアン数	z 値
65	8498224525	8.50^{-01}	0.8498232126	3.77^{151}	5.00	83	0	5.35^{-27}	1.0000000000	2.37^{125}	11.2
66	1305429761	1.31^{-01}	0.9803657493	5.78^{150}	5.34	84	0	1.96^{-29}	1.0000000000	8.68^{122}	11.5
67	174082207	1.74^{-02}	0.9977742730	7.71^{149}	5.69	85	0	4.95^{-32}	1.0000000000	2.19^{120}	11.9
68	20083463	2.01^{-03}	0.9997822023	8.90^{148}	6.03	86	0	8.27^{-35}	1.0000000000	3.66^{117}	12.2
69	1997212	1.99^{-04}	0.9999816915	8.84^{147}	6.38	87	0	8.70^{-38}	1.0000000000	3.85^{114}	12.6
70	169833	1.70^{-05}	0.9999986849	7.53^{146}	6.72	88	0	5.41^{-41}	1.0000000000	2.40^{111}	12.9
71	12216	1.23^{-06}	0.9999999197	5.47^{145}	7.07	89	0	1.84^{-44}	1.0000000000	8.14^{107}	13.3
72	747	7.61^{-08}	0.9999999958	3.37^{144}	7.41	90	0	3.09^{-48}	1.0000000000	1.37^{104}	13.6
73	33	3.95^{-09}	0.9999999998	1.75^{143}	7.76	91	0	2.25^{-52}	1.0000000000	9.97^{99}	14.0
74	3	1.72^{-10}	1.0000000000	7.61^{141}	8.10	92	0	5.99^{-57}	1.0000000000	2.65^{95}	14.3
75	0	6.20^{-12}	1.0000000000	2.75^{140}	8.44	93	0	4.60^{-62}	1.0000000000	2.04^{90}	14.6
76	0	1.84^{-13}	1.0000000000	8.15^{138}	8.79	94	0	7.30^{-68}	1.0000000000	3.23^{84}	15.0
77	0	4.44^{-15}	1.0000000000	1.97^{137}	9.13	95	0	1.47^{-74}	1.0000000000	6.53^{77}	15.3
78	0	8.64^{-17}	1.0000000000	3.83^{135}	9.48	96	0	1.78^{-82}	1.0000000000	7.89^{69}	15.7
79	0	1.33^{-18}	1.0000000000	5.91^{133}	9.82	97	0	3.63^{-92}	1.0000000000	1.61^{60}	16.0
80	0	1.61^{-20}	1.0000000000	7.14^{131}	10.2	98	0	1.16^{-104}	1.0000000000	5.15^{47}	16.4
81	0	1.49^{-22}	1.0000000000	6.62^{129}	10.5	99	0	2.86^{-122}	1.0000000000	1.27^{30}	16.7
82	0	1.04^{-24}	1.0000000000	4.62^{127}	10.9	100	0	2.26^{-152}	1.0000000000	1	17.1

$a^b = a\times 10^b$．オーダー100のオイラリアン分布（オイラリアン数）で，このオイラリアン分布で65は標準正規分布では$(65-(100+1)/2)/\sqrt{(100+1)/12}=4.998$となり，約 5σ 以上のふるまいを見ていることになる．「度数」は10^{10}個の乱数を発生させた時の度数である．「確率」はこの裾の中で基準化し，「累積確率」は確率の累積である．「オイラリアン数」は対応するビン番号に対するものである．z 値は標準化したときに対応する標準正規分布の z 値である．

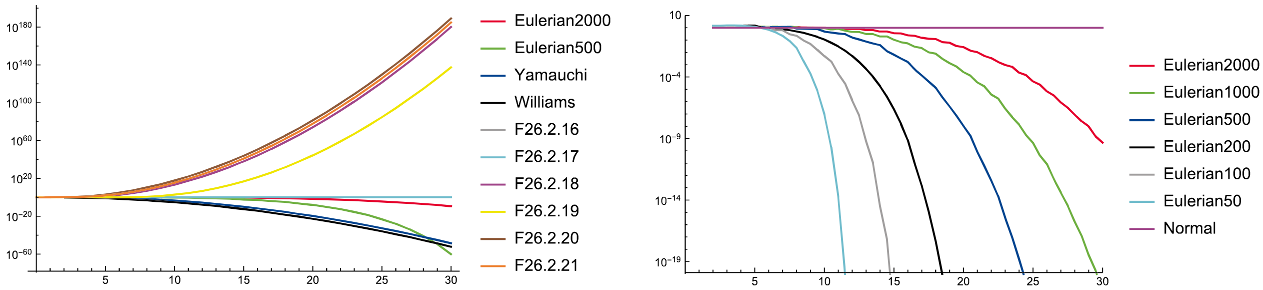

図 1 ：標準正規分布の上側確率の近似精度（横軸：z 値，縦軸：近似確率÷精確上側確率）

は，受容・棄却法である．その理由は裾の部分だけの累積分布関数を容易に求められないためである（四辻, 2010; Thomas *et al*., 2007）．この方法の欠点は必要な個数の乱数の数倍の一様乱数を使うことである．しかし，本報告で提案する方法は，目的の個数の乱数しか使わないことが特徴であるので，非常に効率的な方法であることがわかる．

6　数 値 実 験

表 4 に，オーダー100のオイラリアン分布(オイラリアン数）にしたがう裾の領域（ビン番号が65以上）の乱数を，10^{10}個生成した結果を示す．このオイラリアン分布のビン番号65は，標準正規分布では$(65-(100+1)/2)/\sqrt{(100+1)/12}=4.998$となり，約 5σ 以上のふるまいを見ていることになる． 2 列目の「度数」は生成した乱数をビン毎に集計した度数で，次の「確率」はこの裾の中で基準化した確率（理論値），「累積確率」はこれらの確率の累積である．その確率の根拠となるオイラリアン数の概数を右から 2 列目に示す．この数を 100! で割ることで，対応するビンの実際の確率が得られる．ビン番号74では，基準化した確率が1.72×10^{-10}なので，生成した乱数の総数が10^{10}個程度では数個しか出ないということが実験からも確認できる．

図 1 に各種正規確率の近似式（付録を参照）との比較を示す．横軸が z 値で，縦軸が（近似した上側確率）÷(標準正規分布の精確な上側確率）である．“Eulerian2000”はオーダーが2000のオイラリアン分布，“Yamauchi”は山内 (1964)，“Williams”は Williams (1646)で示された近似式である．図の左側は主として統計数値表（山内編, 1972）と Abramowitz & Stegun (1965)に掲載された近似式の比較を，右側には正規分

布を1とした場合のいくつかのオーダーのオイラリアン分布との比較をしたものである．オーダーが大きいほどより近似精度が良いことが見て取れる．オイラリアン分布は正確な確率に対して小さい値であることも確認できる．

7 おわりに

オイラリアン分布を通した正規分布の裾の領域の乱数を生成する方法を提示し，想定通りの結果を得た．今後の研究課題は，生成した裾の乱数の統計的な検証，他の手法との実行時間の比較，数値実験を数式処理システム上で行っているため，一般の利用を考慮した既存のプログラミング言語への対応である．

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*, 9th ed., Dover.

[2] Bell, J. (2015). A Simple and Pragmatic Approximation to the Normal Cumulative Probability Distribution. SSRN Electronic Journal. doi:10.2139/ssrn.2579686.

[3] Hastings, Jr. C. (1955). *Approximations for Digital Computers*, Princeton Univ. Press.

[4] Nakamura, N. (2015). Pseudo-Normal Random Number Generation via the Eulerian Numbers, Josai Mathematical Monographs 8, 85-95.

[5] 中村永友, 土屋高宏 (2015). 離散型確率分布を通した連続型確率分布にしたがう乱数の生成, 日本計算機統計学会　第29回シンポジウム論文集, 釧路市生涯学習センター.

[6] 中村永友, 土屋高宏 (2016). 疑似乱数における局所一様性に関する統計的性質, 日本計算機統計学会　第30回シンポジウム論文集, 沼津市プラサヴェルデ.

[7] 清水良一 (1976). 中心極限定理, 教育出版.

[8] 土屋高宏, 中村永友 (2009). 変形バケットソートに現れる離散型確率分布と Eulerian 数, 統計数理, Vol.57, No.1, 159-178.

[9] Tsuchiya, T. (2015). Eulerian distribution with a missing number, Josai Mathematical Monographs 8, 73-83.

[10] Thomas, D.B, Luk, W., Leong, P.H.W. and Villasenor, J.D. (2007). Gaussian random number generators, ACM Comuting Surveys, Vol.39(4), Article No.11, doi:10.1145/1287620.1287622.

[11] 山内二郎 (1964). 正規分布に関する近似関数, 第5回プログラミングシンポジウム報告集, N107-114, 情報処理学会.

[12] 山内二郎編 (1972). 統計数値表 JSA-1972, 日本規格協会.

[13] 四辻哲章 (2010). 計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法, プレアデス出版.

[14] Williams, J.D. (1946). An approximation to the probability integral, Annals of Mathematical Statistics, 17(3), 363-365.

付録

A　近似関数1

標準正規分布の累積分布関数の $0 \le x < \infty$ における近似式 (Hasting, 1955) を以下に示す．各見出しの番号は，Abramowitz & Stegun (1965) のセクション番号である．

26.2.16

$$P(x)=\phi(x)(a_1t+a_2t^2+a_3t^3)+\epsilon(x),$$

$t=1/(1+a_0x)$，$a_0=0.33267$，$a_1=0.43618\ 36$，
$a_2=-0.12016\ 76$，$a_3=0.93729\ 80$，$|\epsilon(x)|<1.0\times10^{-5}$.

26.2.17

$$P(x)=\phi(x)(b_1t+b_2t^2+b_3t^3+b_4t^4+b_5t^5)+\epsilon(x),$$

$t=1/(1+b_0x)$，$b_0=0.23164\ 19$，$b_1=0.31938\ 1530$，
$b_2=-0.35656\ 3782$，$b_3=1.78147\ 7937$，
$b_4=-1.82125\ 5978$，$b_5=1.33027\ 4429$，
$|\epsilon(x)|<7.5\times10^{-8}$.

26.2.18

$$P(x)=\frac{1}{2(1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4)^4}+\epsilon(x),$$

$c_1=0.19685\ 4$，$c_2=0.11519\ 4$，$c_3=0.00034\ 4$，
$c_4=0.01952\ 7$，$|\epsilon(x)|<2.5\times10^{-4}$.

26.2.19

$$P(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+d_4x^4+d_5x^5+d_6x^6)^{16}}+\epsilon(x),$$

$d_1=0.04986\ 73470$，$d_2=0.02114\ 10061$，
$d_3=0.00327\ 76263$，$d_4=0.00003\ 80036$，
$d_3=0.00004\ 88906$，$d_4=0.0000\ 53830$，
$|\epsilon(x)|<1.5\times10^{-7}$.

26.2.20

$$P(x)=\frac{1}{a_0+a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6}+\epsilon(x),$$

$a_0=2.49089\ 5$，$a_2=1.46600\ 3$，$a_4=-0.02439\ 3$，
$a_6=0.17825\ 7$，$|\epsilon(x)|<2.7\times10^{-3}$.

26.2.21

$$P(x)=\frac{1}{b_0+b_2x^2+b_4x^4+b_6x^6+b_8x^8+b_{10}x^{10}}+\epsilon(x),$$

$b_0=2.50523\ 67$，$b_2=1.28312\ 04$，$b_4=0.22647\ 17$，
$b_6=0.13064\ 69$，$b_8=-0.02024\ 90$，$b_{10}=0.00391\ 32$，
$|\epsilon(x)|<2.3\times10^{-4}$.

B　近似関数2

統計数値表 (山内, 1972) に掲載されている近似式を示す．

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\exp\left(\frac{-2u^2}{\pi}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{2i}^* u^{2i}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ここで，$u\geq 0$ で，$i=0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$a_{2i}^*=\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{4}{\pi}}\left(\sec^2\theta-\frac{4}{\pi}\right)^i d\theta$$

となっていて，具体的には以下のようになる．

$$a_0^*=1,\ a_2^*=0,\ a_4^*=\frac{2}{3\pi^2}(\pi-3),$$

$$a_6^*=\frac{1}{45\pi^3}(7\pi^2-60\pi+120), \ldots$$

Williams (1946)

$k=0$ とすることで，次式を得る．

$$P(u)=1-\Phi(u)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\exp\left(\frac{-2u^2}{\pi}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\epsilon(x),$$

$u\geq 0$，$|\epsilon(u)|<3.2\times 10^{-3}$．Bell (2015) はこの式と全く同じ式を示している．

Williams と 山内 (1946)

$k=2$ とすることで，次式を得る．

$$P(u)=1-\Phi(u)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\exp\left(\frac{-2u^2}{\pi}\right)\left\{1+\frac{2(\pi-3)}{3\pi^2}u^4\right\}\right]^{\frac{1}{2}}+\epsilon(\mathrm{x}),$$

$u\geq 0$，$|\epsilon(u)|<3.8\times 10^{-4}$．

山内 (1964)（Williams 公式の最良化）

$$P(u)=1-\Phi(u)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\exp\left(\frac{-2u^2}{\pi}\right)\left\{1+\left(b_1+\frac{b_2}{u^2+b_3}\right)u^4\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\epsilon(x),$$

$u\geq 0$，$|\epsilon(u)|<2.04\times 10^{-5}$，$b_1=0.0055$，$b_2=0.0551$，$b_3=14.4$．

The Proceedings of the Research Institute of Sapporo Gakuin University Vol.4, 1–7 (2017)

The Evaluation of Tail Probability of Normal Distribution and Its Random Number Generation

Nagatomo NAKAMURA[1]
and
Takahiro TSUCHIYA[2]

Abstract

The random numbers that follow a normal distribution, the normal random numbers, are used in numerical experiments or simulation studies in several experimental sciences. The normal random numbers do not directly generate it, but these obtain uniform random numbers through some transformations. In this report, we propose a method to generate random numbers at the tail of a very large amount of normal distribution, specifically 5σ or more. The random number of a continuous probability distribution target is generated through an approximation to a discrete probability distribution. The approximate probability distribution, the Eulerian distribution, also shows the merits of the probability approximation of the tail to the normal distribution. At the same time, we present a random number generation algorithm.

Keywords: Normal Random Numbers, Uniform Random Numbers, Eulerian Distribution.

[1]Department of Economics, Sapporo Gakuiun University; nagatomo@sgu.ac.jp.
[2]Department of Mathematics, Josai University; takahiro@math.josai.ac.jp.