〈論　文〉

焦点回帰モデルの精確推定

中村　永友
土屋　高宏

要　旨

ある定点（焦点）を通る m 本の回帰直線群を推定するモデルについて議論する。この焦点は観測状況や実験条件に依存して動く点であり，回帰直線のパラメータと同時に推定する必要がある。基礎となる 2 つのモデルについて，最小 2 乗法あるいは対数尤度の最大化に基づき，未知のパラメータを推定する。得られたモデルの妥当性を数値的に検証し，実データへの応用を試みる。

1　はじめに

あるデータセットが独立変数と従属変数からなり，それが複数個で構成されるデータセット群がある。それぞれのデータセットは単回帰直線が想定され，同時に共通の定点(以下「焦点」とする）を通ることがわかっている。このような状況のデータセットは，砂浜などの砂面上において，砂が飛んでいる状況下のある高さの風速がそれにあたる（中村他，2006；中村・土屋，2007)。

想定される焦点を通る m 個の回帰直線群において，$m=2$ のデータセット群の場合は個々のデータセットでそれぞれ単回帰モデルを想定して回帰直線を推定することができるため，焦点および回帰係数の推定値は容易に求めることができる。しかしながら，$m \geq 3$ のデータセット群では，個々に回帰直線を当てはめると，推定した回帰直線群が必ずしも 1 点で交わるとは限らないため，すべてのデータセット群に対して，最小 2 乗法あるいは対数尤度の最大化によって推定を行う必要がある。この推定は，ニュートン法などの数値的最適化手法を用いることにより可能であるが，精密な推定量はこれまで導出されていない。中村・土屋(2007)はデータ取得の背景を考慮し，データの重心の通過や誤差分散に関する制約条件を入れて焦点回帰モデルに関する 4 種類のモデリングを行った。さらに，最適化手法を用いた数値実験で各モデルを検証し，実データ（飛砂データ）へのあてはめを行った。本論文では，2 つの焦点回帰モデルに基づき，焦点と各直線の精確な推定方法を提案する。

本論文の構成は以下の通りである。2 節では，2 つの焦点回帰モデルについて，焦点の精

密推定量を導出する。また，$m=2$ の場合に，最小 2 乗法によって得られる焦点は 2 つの回帰直線の交点と同等であることを示す。3 節では，数値実験を通して，導出した推定量の妥当性を検証し，実データへの応用を試みる。

2　焦点をもつ回帰直線群の推定

焦点回帰モデルは，データの重心の通過や誤差分散に関する制約条件を入れることにより，いくつかのモデルが考えられる（中村・土屋，2007）。本節では，誤差分散を共通として，焦点をもつ回帰直線群がデータの重心を通らない場合と通る場合の 2 つのモデルを取り上げ，最小 2 乗法に基づく焦点の推定量を導出する。

モデル 1 －重心を通らない焦点回帰モデル

重心を通る焦点回帰モデルは焦点の座標を(u, v)とすると，一般にベクトルを用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n=a_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)+\varepsilon_k, \qquad (k=1, 2, \cdots, m). \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{y}_k=(y_{k1}, y_{k2}, \cdots, y_{kn})'$，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，$\mathbf{1}_n$ はその要素がすべて 1 の n 次元ベクトル $\mathbf{1}_n=(1, 1, \cdots, 1)'$，$\varepsilon_k=(\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}, \cdots, \varepsilon_{kn})'$，$\varepsilon_{ki}\overset{\text{iid}}{\sim}N(0, \sigma^2)$とする。ここでは，$\boldsymbol{x}$ はすべてのデータセットで共通とする。

m 個のデータセットに基づく回帰直線群の焦点(u, v)の最小 2 乗推定量に関して，一般に次の定理が成り立つ。

定理 1　焦点をもつ m 個の回帰モデル(1)式において，誤差項の 2 乗和

$$S_1=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k'\varepsilon_k=\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-a_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}'\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-a_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\} \tag{2}$$

を最小とする$(u, v)=(\hat{u}, \hat{v})$は

$$p=\frac{n}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)-\frac{1}{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2+(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2-n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k), \tag{3}$$

$$q=\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2-\frac{n}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)^2-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2+n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}r=&\frac{1}{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)^2-\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)\\&+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2\end{aligned} \tag{5}$$

を係数とする 2 次方程式 $pu^2+qu+r=0$ の一つの解 $\hat{u}$ と

$$\hat{v}=\frac{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-n\hat{u})\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-\hat{u}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}} \tag{6}$$

で与えられる。

証明　S_1 を $a_k(k=1,2,\cdots,m)$，u，v でそれぞれ偏微分して 0 とおくと，次のようになる。

$$\frac{\partial S_1}{\partial a_k}=-2\Big[(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-a_k(\boldsymbol{x}_k-u\mathbf{1}_n)\}\Big]=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u}=2\left\{\sum_{k=1}^{m}a_k\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)-\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}a_k^2\right\}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial v}=-2\left\{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}a_k+nu\sum_{k=1}^{m}a_k-mnv\right\}=0. \tag{9}$$

(7)式より

$$a_k=\frac{(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)}{(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)},\qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

を得る。(10)式を(9)式に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k+m(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)^2v\\&=mn(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v\end{aligned} \tag{11}$$

となるから，(11)式より焦点の y 座標は

$$v=\frac{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}} \tag{12}$$

と表される（付録 A. 1 参照）。

次に，(10)式を(8)式に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)\\&\qquad-\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\{(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)\}^2=0\end{aligned} \tag{13}$$

を得る。(12)式を(13)式に代入した式は，(3)～(5)式の p，q，r をそれぞれ u^2，u の係数，定数項とする u の 2 次方程式 $pu^2+qu+r=0$ と同値である（付録 A. 2 参照）。したがって，2 次方程式 $pu^2+qu+r=0$ の一つの解 $\hat{u}$ が S_1 を最小とすることがわかる。また，対応する v の値は $u=\hat{u}$ を(12)式に代入した(6)式で与えられる。　□

誤差項の 2 乗和(2)式の最小化はモデルの対数尤度関数

$$l(a_k, u, v, \sigma^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\{\boldsymbol{y}_k-v\boldsymbol{1}_n-a_k(\boldsymbol{x}-u\boldsymbol{1}_n)\}'\{\boldsymbol{y}_k-v\boldsymbol{1}_n-a_k(\boldsymbol{x}-u\boldsymbol{1}_n)\}\right]$$

の最大化と同値である。

例　$\boldsymbol{m}=2$ の焦点回帰モデル

$m=2$ のとき，p，q，r はそれぞれ

$$p=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)-n\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)\right\},$$
$$q=-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)^2+\frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)^2,$$
$$r=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)\right\}$$

となる。これより，

$$\sqrt{q^2-4pr}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)^2+\frac{n}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)^2$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i}\right)$$

であるから，S_1 を最小とする 2 次方程式 $pu^2+qu+r=0$ の解 $u=\hat{u}$ は

$$\hat{u}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i})-(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i})}{(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i})-n(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i})} \tag{14}$$

で与えられる。(6)式に(14)式の $\hat{u}$ を代入すると，

$$\hat{v}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i})(\sum_{i=1}^{n}y_{1i})-(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i})(\sum_{i=1}^{n}y_{2i})}{(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}y_{2i})-n(\sum_{i=1}^{n}x_iy_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{2i})} \tag{15}$$

を得る。

焦点$(\hat{u}, \hat{v})$は 2 つの線形回帰モデル $y_{ki}=\alpha_kx_i+\beta_k+\varepsilon_{ki}$ $(k=1,2\,;\,i=1,\cdots,n)$から推定された回帰直線 $y=\hat{\alpha}_kx+\hat{\beta}_k$ $(k=1,2)$の交点$\left(\dfrac{\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2}, \dfrac{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2-\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2}\right)$と一致する。ただし，

$$\hat{\alpha}_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_{ki}-\bar{y}_k)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\ \hat{\beta}_k=\bar{y}_k-\hat{\alpha}_k\bar{x}, \qquad (k=1,2)$$

である。

モデル 2 －重心を通る焦点回帰モデル

焦点回帰モデル(1)式にデータの重心$(\bar{x}, \bar{y}_k)$の通過を制約条件に入れたモデルは，次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{y}_k-v\boldsymbol{1}_n=b_k(\boldsymbol{x}-u\boldsymbol{1}_n)+\boldsymbol{\varepsilon}_k, \qquad (k=1,2,\cdots,m). \tag{16}$$

ただし，$b_k=(\bar{y}_k-v)/(\bar{x}-u)$とする。

最小2乗法に基づくモデル(16)式の焦点の推定量は次の定理で与えられる。

定理2　重心を通る焦点回帰モデル(16)式において，誤差項の2乗和

$$S_2=\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}'\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\} \tag{17}$$

を最小とする$(u, v)=(\hat{u}, \hat{v})$は

$$\hat{u}=\frac{\bar{x}(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)^2+m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2)-m\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k}{(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)-n\bar{x}(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)^2+mn\bar{x}(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2)-m\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k}, \tag{18}$$

$$\hat{v}=\frac{(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)\hat{u}+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)} \tag{19}$$

で与えられる。

証明　S_2のu，vに関する偏微分は

$$\frac{\partial S_2}{\partial u}=2\sum_{k=1}^{m}\left\{\mathbf{1}_n b_k-(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\frac{\partial b_k}{\partial u}\right\}\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}=0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial v}=-2\sum_{k=1}^{m}\left\{\mathbf{1}_n+(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\frac{\partial b_k}{\partial v}\right\}'\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}=0 \tag{21}$$

となる。(21)式を整理すると，

$$\begin{aligned}(\bar{x}-u)^2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k-(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-(\bar{x}-u)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\boldsymbol{y}_k\\ +(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-mn(\bar{x}-u)^2v+2m(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v\\ -m(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v=0\end{aligned} \tag{22}$$

となるから，$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k=n\bar{y}_k$，$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}=n\bar{x}$に注意すると，

$$v=\frac{(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)} \tag{23}$$

を得る（付録B.1参照)。

次に，(20)式を整理すると，

$$\begin{aligned}(\bar{x}-u)^2\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)-(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)^2\\ -(\bar{x}-u)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)+(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)^2=0\end{aligned} \tag{24}$$

となる。(23)式を(24)式に代入した式はuの1次方程式となり，S_2を最小とする$u=\hat{u}$は(18)式で与えられる(付録B.2参照)。また，対応するvの値は$u=\hat{u}$を(23)式に代入した(19)式で与えられる。　□

(17)式の最小化は対数尤度関数

$$l(u, v, \sigma^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{n}{2}\log2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}'\{\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n-b_k(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\}\right]$$

の最大化と同値である。

3　数値実験と実データへの応用

焦点(u, v)の推定量$(\hat{u}, \hat{v})$を求めるための数値実験を(3)〜(5)式を係数とするuの2次方程式の解$\hat{u}$と(6)式の$\hat{v}$を用いて試みた。データは焦点$(1, 0)$を通る真の構造$y=3x-3$，$y=2x-2$, $y=x-1$をもつ3つの焦点回帰モデルl_1：$y_{1i}-3x_i-3+\varepsilon_i$，$l_2$：$y_{2i}=2x_i-2+\varepsilon_i$，$l_3$：$y_{3i}=x_i-1+\varepsilon_i$を仮定し，データ数$n=10$，$\varepsilon_i\sim N(0, 0.3^2)$としてデータを発生させた。図1はある1組のデータから焦点$(u,)$と3つのモデルl_1，l_2，l_3の傾きa_1，a_2，a_3を推定したものである。それぞれの推定値は$\hat{u}=1.12$, $\hat{v}=0.19$, $\hat{a}_1=3.08$, $\hat{a}_2=2.07$, $\hat{a}_3=0.94$となり，3つのデータ

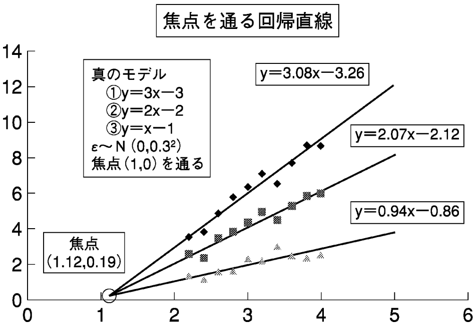

図1：焦点(1, 0)をもつ回帰直線

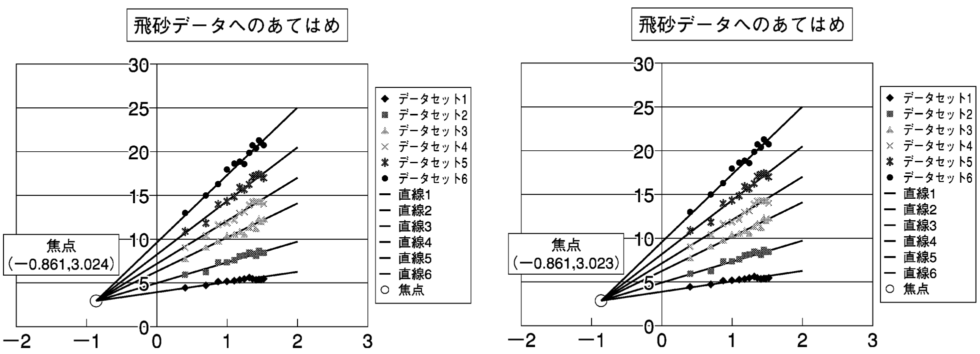

図2：飛砂データへの適用（重心を通らない焦点回帰モデル：左，重心を通る焦点回帰モデル：右）

セットに対して，焦点を通る回帰直線をよく推定しているといえる。

また，飛砂データ（中村•土屋，2006）に本推定量をあてはめた結果を図 2 に示す。中村•土屋（2007）で推定された焦点と比べて有効数字 4 桁の範囲で一致しており，数値的最適化と同じ推定値を与えている。

4　おわりに

本論文は，焦点をもつ回帰直線に対して 2 つのモデルを設定し，パラメータの精確な推定方法を提案した。焦点回帰モデルは工学分野（海岸工学）において想定されるが，そのモデル構築法と評価はこれまでのところ理論的な解明がなされていない。一般に焦点の推定値は非線形方程式の解として与えられ，数値的最適化手法により求めることができる（中村・土屋，2007）。しかし，最適化手法は局所解収束の問題が生じ，初期値や反復計算の手法などを慎重に検討する必要がある。そのため，推定量が精密な形で導出できれば，精確な推定が可能となる。焦点の推定値は非線形方程式を解くことにより得られるが，精密法によると一方の変数の 2 次方程式や 1 次方程式に帰着され，容易に精密推定値を求められることが示された。これにより，解を求めるための反復計算をしなくても焦点を通る回帰直線の推定が可能であることを示した。

焦点回帰モデルの設定には種々の観測・実験条件に応じて，残差分散に関する制約条件を入れたモデルも考えられるが，これは推定量がより複雑な式で現れるため，その精密な推定法はまだ解明されていない。これは今後の課題としたい。

謝　辞　論文執筆にあたりデータの提供と有意義な議論をしていただいた，日本大学大学院総合科学研究科 堀田新太郎教授，日本大学理工学部 久保田 進教授に心から感謝いたします。また本研究は札幌学院大学研究促進奨励金（SGU-S 06-198007-18）の補助を，日本学術振興会 科学研究費補助金，基盤研究（C），課題番号 16500179 から一部補助を受けています。

参考文献

[1] 中村永友，土屋高宏(2007). 焦点をもつ回帰直線群の推定とその周辺，応用統計学，Vol.36, No.1, 31-50.
[2] 中村永友，土屋高宏，堀田新太郎，久保田進（2006). 焦点をもつ回帰直線群の推定，日本計算機統計学会 第 20 回記念大会論文集，67-70.

付　　録

A　焦点の推定－モデル 1

A.1　(11)式から(12)式の導出

(11)式

$$(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k-(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x}-nu)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k+m(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x}-nu)^2v$$
$$=mn(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v$$

の各項を展開していくと，

$$(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k=(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k-2u(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k+nu^2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k,$$
$$-(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x}-nu)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k=-(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k+nu\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k+u(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k-nu^2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k,$$
$$m(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x}-nu)^2v=m(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})^2v-2mnuv(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})+mn^2u^2v,$$
$$mn(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v=mnv(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})-2mnuv(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})+mn^2u^2v$$

より，

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k-u(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k-(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k+m(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})^2v-mnv(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})+nu\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k=0$$

となる。これより

$$v=\frac{(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x}-nu)\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n\boldsymbol{y}_k}{m\{(\mathbf{1}'_n\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}$$

を得る。　□

A.2　(13)式が u の 2 次方程式となることの証明

(13)式

$$(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}'_n(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)$$
$$-\mathbf{1}'_n(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\{(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)\}^2=0$$

は

$$(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)'=\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}'_k-v\boldsymbol{y}_k\mathbf{1}'_n-v\mathbf{1}_n\boldsymbol{y}'_k+v^2\mathbf{1}_n\mathbf{1}'_n$$

を用いて，次のように表すことができる。

$$(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)-(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v$$
$$-(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v+(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v^2$$
$$-\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)+\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\boldsymbol{y}_k\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v$$
$$+\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\mathbf{1}_n\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v-\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v^2=0.$$

さらに，上式を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&m\{n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v^2-\{n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v\\
&-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v+u(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v\\
&+(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v-nu\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v\\
&+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)-u(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\\
&-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)+nu\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_k'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)=0.
\end{aligned}\tag{25}$$

(25)式に(12)式を代入すると，(25)式は u の3次方程式とみなすことができる。ここで，v^2 の項は

$$\begin{aligned}
&m\{n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)v^2\\
&=\frac{1}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}\Biggl\{-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)^3\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)^2-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2\\
&\quad+2(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}-nu)^2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)\Biggr\}v^2
\end{aligned}$$

と書くことができるから，(12)式を代入したときの u^3 の項は

$$\frac{1}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}\left\{n^3\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)^2-2n^2(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)+n(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2\right\}u^3\tag{26}$$

であることがわかる。

一方，(25)式12(12)式を代入して，u^3 の項はその第4項と第6項に現われ，(26)式を－1倍したものに等しい。したがって，(12)式を代入した(25)式は u^3 の項が0となり，u の2次方程式となる。

(25)式の u^2 の係数を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}\Biggl\{n(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)-n^2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)\\
&\quad+n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^3\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2\Biggr\}+(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2-n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)\\
&=\frac{n}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)-\frac{1}{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\right)^2+(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2-n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)
\end{aligned}$$

となる。また，u の係数は

$$\frac{1}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}\Bigg\{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2-n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2$$
$$-n(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2+n^2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2\Bigg\}-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2+n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2$$
$$=\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2-\frac{n}{m}\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)^2+n\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2$$

となる。さらに，(25)式の定数項は

$$\frac{1}{m\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2-n\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\}}\Bigg\{(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^3\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2-n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2$$
$$-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})^2\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)+n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)\Bigg\}$$
$$+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2$$
$$=\frac{1}{m}(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)^2-\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k\Bigg)$$
$$+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k)-(\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k)^2.$$

したがって，u^2，u の係数および定数項 p，q，r はそれぞれ(3)式，(4)式，(5)式で与えられる。

B　焦点の推定－モデル 2

B. 1　(22)式から(23)式の導出

(22)式は次のように表すことができる。

$$(\bar{x}-u)^2\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k-(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-(\bar{x}-u)\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'\boldsymbol{y}_k$$
$$+(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k$$
$$=mn(\bar{x}-u)^2v-2m(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v+m(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)v.$$

$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k=n\bar{y}_k$，$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}=n\bar{x}$ に注意して，上式の両辺を展開して整理すると，次のようになる。

$$\text{左辺}=\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\Bigg)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k,$$
$$\text{右辺}=m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)v.$$

したがって，

$$v=\frac{(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}$$

を得る。

B. 2　焦点の x 座標(18)式の導出

(24)式

$$
\begin{aligned}
&(\bar{x}-u)^2\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)-(\bar{x}-u)\mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)^2\\
&\quad-(\bar{x}-u)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{y}_k-v\mathbf{1}_n)+(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}-u\mathbf{1}_n)\sum_{k=1}^{m}(\bar{y}_k-v)^2=0
\end{aligned}
$$

の左辺第 2 項までは，$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y}_k=n\bar{y}_k$，$\mathbf{1}_n'\boldsymbol{x}=n\bar{x}$ より 0 となる。したがって，第 3 項と第 4 項を計算してまとめることにより，

$$
\begin{aligned}
&m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)v^2+\left(n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)uv-\left(n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2-\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)u\\
&\quad+\left\{n\bar{x}^2\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k+\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}v+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k=0 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで，(27)式に(23)式を代入して各項を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)v^2=\frac{1}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2u^2\right.\\
&\quad\left.+2\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)\left\{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}u+\left\{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}^2\right],\\
&\left(n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)uv\\
&\quad=\frac{1}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}\left[\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}n\bar{x}u\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right.\\
&\qquad\left.-\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}u\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right],\\
&\left\{n\bar{x}^2\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k+\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}v\\
&\quad=\frac{1}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}\left\{n\bar{x}^2\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k+\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}\\
&\qquad\times\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k-n\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)u+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right\}
\end{aligned}
$$

となる。これらを(27)式に代入すると u^2 の項が 0 になるから，(23)式を代入した(27)式は，u の 1 次方程式となる。

(27)式の u の係数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
q&=\frac{1}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}\left\{n\bar{x}^2\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)\right.\\
&\qquad\left.+n\bar{x}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2-n^2\bar{x}^3\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2\right\}\\
&=-\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)+\frac{n}{m}\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2-n\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2\right)+\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k
\end{aligned}
$$

となる。さらに(27)式の定数項は

$$
\begin{aligned}
r=&\frac{1}{m(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}-n\bar{x}^2)}\left\{-(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2+n\bar{x}^2(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2\right.\\
&\left.-n\bar{x}^3\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)+\bar{x}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)\right\}\\
=&\frac{1}{m}\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)-\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2+(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k^2\right)-\bar{x}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}_k.
\end{aligned}
$$

したがって，(27)式を満たす $u=\hat{u}$ は $\hat{u}=-r/q$ となり，(18)式が導かれる。 □

（なかむら　ながとも　統計科学・計量分析学専攻）

（つちや　たかひろ　統計科学専攻）

（2007 年 6 月 12 日受理）